МЕТОД НЬЮТОНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАНЕНИЙ

Морозова А.Р., студент

Бигаева Л.А. канд. физ.-мат. наук, доцент

г. Бирск, ФГБОУ ВО Бирский филиал БашГУ

Существует множество методов решения систем нелинейных уравнений. В статье рассматривается метод Ньютона. Основная идея этого метода состоит в выделении из уравнений системы линейных частей, которые являются главными при малых приращениях аргументов. Это позволяет свести исходную задачу к решению последовательности систем линейных уравнений.

Данный метод является обобщением метода касательных. Существенную роль в этом методе играет специальная матрица – так называемая матрица Якоби (или якобиян):

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Очевидно, что построить её можно лишь при условии, что каждая из функций, входящая в систему

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0; \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0; \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0. \end{cases}, \tag{2}$$

дифференцируема по каждой из переменных.

Напомним, что метод касательных применительно к одному уравнению $f(x) = 0$ заключается в построении итерационной последовательности

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \tag{3}$$

Обобщением этой формулы на системы уравнений является следующая формула:

$$\mathrm{X}^{(k+1)} = \mathrm{X}^{(k)} - \mathrm{J}^{-1}\left(\mathrm{X}^{(k)}\right)\cdot f\left(\mathrm{X}^{(k)}\right), \tag{4}$$

где X - n-мерный вектор-столбец с компонентами $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, f - n-мерный вектор-функция, k - номер итерации $k = (0,1,2,...)$, J^{-1} - матрица, обратная матрице J на k-той итерации, J - матрица Якоби.

О сходимости метода Ньютона для систем уравнений можно, не вдаваясь в детали, сказать то же, что и о сходимости метода касательных для одного уравнения: если начальное приближение выбрано достаточно близко к решению системы, то итерационная последовательность сходится к этому решению, и сходимость является квадратичной.

Метод Ньютона весьма трудоемок, поскольку на каждом шаге итерационного процесса необходимо найти матрицу, обратную матрице Якоби. Чаще всего для этого используют метод Гаусса. Тем не менее, для системы, состоящей из двух-трех уравнений, можно найти обратную матрицу аналитическим методом, известным из курса алгебры. В частности, при решении системы двух уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0; \\ f_2(x_1, x_2) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

для матрицы Якоби второго порядка обратная матрица имеет вид

$$\mathrm{J}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{11}}{d} & \dfrac{a_{12}}{d} \\ \dfrac{a_{21}}{d} & \dfrac{a_{22}}{d} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где

$$a_{11} = \frac{\partial f_2}{\partial y}; a_{12} = -\frac{\partial f_1}{\partial y}; a_{21} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}; a_{22} = \frac{\partial f_1}{\partial x}; d = \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial x}. \tag{7}$$

Итерационные формулы (4) в этом случае примут вид, непосредственно пригодный для вычислений:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{1}{d^{(k)}}\left[a_{11}^{(k)} f_1(x_k, y_k) + a_{12}^{(k)} f_2(x_k, y_k)\right]; \\ y_{k+1} &= y_k - \frac{1}{d^{(k)}}\left[a_{21}^{(k)} f_1(x_k, y_k) + a_{22}^{(k)} f_2(x_k, y_k)\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Верхний индекс k в (8) означает, что соответствующая величина вычисляется в точке $(x^{(k)}, y^{(k)})$.

Отметим эмпирическое правило: если задана абсолютная погрешность приближенного решения системы ε, то процесс итерации в большинстве случаев можно остановить, когда для каждой из переменных x_i выполнено неравенство $\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| \le \varepsilon.$

Пример. Решить методом Ньютона систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^2 - 3 = 0; \\ x^3 - y^2 - 2 = 0. \end{cases}$$

с точностью $\varepsilon = 0{,}00001$.

Имеем

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x^3 + y^2 - 3; \\ f_2(x, y) = x^3 - y^2 - 2. \end{cases}$$

Величины, входящие в формулы (8), принимают вид

$$a_{11} = -2y; a_{12} = -2y; a_{21} = -3x^2; a_{22} = 3x^2; d = -12x^2 y.$$

Начальным приближением служит точка $x^{(0)} = -0{,}7;\ y^{(0)} = -0{,}7.$ Последовательно находим

$$f_1(x_0, y_0) = -2{,}853; f_2(x_0, y_0) = -2{,}833;$$

$$a_{11}^{(0)} = 1{,}4; a_{12}^{(0)} = 1{,}4; a_{21}^{(0)} = -1{,}47; a_{22}^{(0)} = 1{,}47; d = 4{,}116.$$

Зададимся таким вопросом: за сколько итераций достигается точность $\varepsilon = 0{,}00001$? Эмпирически ответ можно получить, рассуждая следующим образом. Пятая цифра после запятой в величине x и y совпадает с последующими цифрами, стоящими на том же месте в 4-й итерации $x_4 = 1{,}35721;\ y_4 = -0{,}70711$.

Таким образом, сходимость в методе Ньютона более быстрая. Кроме того в методе Ньютона не надо заниматься искусственным подбором параметров (который может оказаться и невозможным). Однако алгоритмически метод Ньютона в общем виде существенно сложнее – прежде всего за счёт необходимости нахождения на каждом шаге итерационного процесса обратной матрицы.

Литература

1. Бурляев В. В. Численные методы в примерах на EXCEL. – М.: МИТХТ, 1999. – 64 с.

2. Лапчик М. П., Рагулова М. И., Хеннер Е. К.; Под редакцией Лапчика М. П. Численные методы: // Учебное пособие для студ. вузов. – М.: Академия, 2004. – 384 с.